E.N.S. SEVRES & ULM 1979

ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

Généralités — Notations — Rappels

L'objet du problème est l'étude d'une méthode d'approximation des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice symétrique réelle.

Un entier $n > 1$ étant fixé une fois pour toutes, le terme « matrice » désigne *dans toute la suite* une matrice *carrée* d'ordre n à éléments *réels*. On note $\mathcal{M}_n$ l'ensemble de ces matrices.

Si A est une matrice, on note $(A)_{ij}$ l'élément de A qui est à la i-ème ligne et à la j-ème colonne. La notation $A = (a_{ij})$ signifie que $(A)_{ij} = a_{ij}$. On utilise également les notations suivantes :

${}^tA$: matrice transposée de la matrice A $({}^tA)_{ij} = (A)_{ji}$.

δ_{ij} : symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$).

$I = (\delta_{ij})$.

diag $(d_i) = D$ où $(D)_{ij} = \delta_{ij} d_i$.

Une matrice A est symétrique si $A = {}^tA$.

Une matrice U est orthogonale si ${}^tUU = U{}^tU = I$.

Le terme « norme matricielle » désigne toute application $\varphi : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}_+$ telle que :

(*i*) Pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n$, on a $\varphi(A + B) \leqslant \varphi(A) + \varphi(B)$.

(*ii*) Pour toute $A \in \mathcal{M}_n$, l'égalité $\varphi(A) = 0$ implique $A = 0$.

(*iii*) Pour toute $A \in \mathcal{M}_n$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(\alpha A) = |\alpha| \varphi(A)$.

(*iv*) Pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n$, on a $\varphi(AB) \leqslant \varphi(A) \varphi(B)$.

On note $|v|_2$ la norme euclidienne d'un élément de $\mathbb{R}^n$:

$$|v|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \right)^{1/2}$$

et on pose, pour $A \in \mathcal{M}_n$

$$\|A\|_2 = \sup \{ |Av|_2 ; v \in \mathbb{R}^n, |v|_2 = 1 \}$$

l'application $\|.\|_2$ ainsi définie étant une norme matricielle.

On rappelle que dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, et que toute suite (infinie) bornée admet au moins une valeur d'adhérence. Enfin, la convergence d'une suite de matrices est à comprendre comme la convergence d'une suite de points de l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n$.

I. Résultats préliminaires (dont certains sont à utiliser dans II)

1° Soit A une matrice symétrique, de valeurs propres λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, et ΔA une matrice symétrique. Montrer que les valeurs propres de la matrice $A + \Delta A$ appartiennent à l'ensemble

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{ z \in \mathbb{R} ; \ |z - \lambda_i| \leqslant \|\Delta A\|_2 \}$$

(on pourra utiliser une matrice orthogonale U telle que ${}^tU A U = \text{diag}(\lambda_i)$.)

2° Montrer que l'application $A \longmapsto \|A\|$ définie par

$$A = (a_{ij}) \longmapsto \|(a_{ij})\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

est une norme matricielle.

3° Existe-t-il une norme $|.|$ sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\|A\| = \sup \{ |Ax| ; x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1 \} ?$$

Justifier votre réponse.

4° Montrer que si U est une matrice orthogonale, on a pour toute $A \in \mathcal{M}_n$

$$\|UA\| = \|AU\| = \|A\|.$$

5° Soient p et q deux entiers tels que $1 \leqslant p < q \leqslant n$, et θ un nombre réel. On définit la matrice Ω par

$$(\Omega)_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{si } i \notin \{p, q\} \quad \text{ou si } j \notin \{p, q\} \\ \cos\theta & \text{si } (i,j) = (p,p) \quad \text{ou } (i,j) = (q,q) \\ \sin\theta & \text{si } (i,j) = (p,q) \\ -\sin\theta & \text{si } (i,j) = (q,p) \end{cases}$$

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice symétrique. On lui associe la matrice symétrique $B = (b_{ij}) = {}^t\Omega A \Omega$. Montrer que

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$$

.../...

6° La matrice A et les entiers p et q étant fixés, on suppose $a_{pq} \neq 0$. Montrer qu'il existe un et un seul nombre réel θ dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ tel que, avec les notations de 5°, on ait $b_{pq} = 0$.

7° On conserve les hypothèses et les notations de 6°. Le nombre θ étant choisi comme dans la question 6°, montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 + 2\, a_{pq}^2$$

8° Soit $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ une suite bornée dans un espace vectoriel normé V de dimension finie, telle que

(*i*) L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x^k) est fini.

(*ii*) $\lim_{k\to\infty} |x^{k+1} - x^k| = 0$

où $|.|$ désigne la norme de V.

Montrer que la suite (x^k) est convergente.

II. Description et étude de la méthode

Une matrice A^1 symétrique étant donnée, on construit une suite de matrices symétriques $(A^k)_{k=1}^{\infty}$ de la façon suivante : la matrice $A^k = (a_{ij}^k)$ étant supposée connue, on choisit l'un des couples (p, q) tels que

$$|a_{pq}^k| = \max_{i \neq j} |a_{ij}^k|\ , \quad 1 \leqslant p < q \leqslant n.$$

N.B. — Pour éviter des situations triviales, on suppose *dans toute la suite* qu'on a $\max_{i \neq j} |a_{ij}^k| > 0$, pour tout entier $k \geqslant 1$.

On note alors Ω^k la matrice construite comme la matrice Ω de la question I. 5°, le nombre θ étant choisi dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ de telle façon que

$$({}^t\Omega^k A^k \Omega^k)_{pq} = 0$$

et on pose

$$A^{k+1} = {}^t\Omega^k A^k \Omega^k.$$

On pose enfin $U^k = \Omega^1 \Omega^2 \ldots \Omega^{k-1}$ $(U^1 = I)$, de sorte qu'on a $A^k = {}^tU^k A^1 U^k$.

9° On pose, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$A^k = (a_{ij}^k) = D^k + E^k\ , \quad \text{avec} \quad D^k = \operatorname{diag}(a_{ii}^k).$$

Montrer qu'on a $\lim_{k\to\infty} E^k = 0$.

10° Montrer que la suite $(D^k)_{k=1}^{\infty}$ a un nombre fini de valeurs d'adhérence.

11° Montrer qu'on a $\lim_{k\to\infty} (D^{k+1} - D^k) = 0$.

12° Montrer que la suite $(A^k)_{k=1}^{\infty}$ converge vers une matrice diagonale, dont les éléments diagonaux sont les n valeurs propres de A.

13° On suppose *dans toute la suite* que les valeurs propres de A^1 sont distinctes. Montrer que la suite $(U^k)_{k=1}^{\infty}$ a un nombre fini de valeurs d'adhérence.

14° Montrer qu'on a $\lim_{k\to\infty} \Omega^k = I$.

15° Montrer que la suite $(U^k)_{k=1}^{\infty}$ converge vers une matrice orthogonale, dont les vecteurs colonnes sont n vecteurs propres associés aux n valeurs propres de A^1.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail